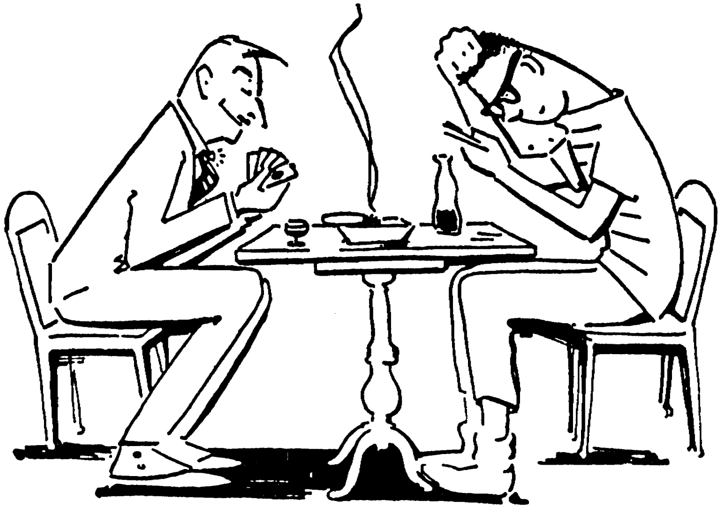
2.

Сэм-Игрок



Карточки в шляпе

Объяснить в два слова, кто таком Сэм-Игрок, проще всего, назвав его «живым компьютером».

Способность Сэма честно зарабатывать свой хлеб основана на его непостижимой способности оценивать шансы на выигрыш и проигрыш в любой азартной игре, которая когда-либо была изобретена человеком. Разумеется, умение Сэма молниеносно подсчитывать шансы «за» и «против» целиком опирается на его замечательную память и отнюдь не свидетельствует о его аналитических способностях.

Другая отличительная черта Сэма-Игрока — его доброе отзывчивое сердце. Матери Сэма-младшего Сэм-старший дал слово, что сын вырастет уважаемым человеком. И Сэм-Игрок сдержал свое обещание. Он рассудил, что Сэм-младший должен хотя бы частично унаследовать способности отца просчитывать комбинации. А что, скажите на милость, в наши дни может пользоваться большим уважением, чем математик, способный производить сложнейшие расчеты?

И Сэм-младший был отправлен в колледж. Правда, по окончании колледжа он мог бы до конца жизни ездить на работу и с работы в городском автобусе, а не за рулем собственного «кадиллака», как Сэм-старший. И хотя у Сэма-младшего могло появиться немало умных книг, он вполне мог так и не обзавестись маленькой черной записной книжечкой с именами и адресами всех хористок в городе. Но главное было бы достигнуто: Сэм-младший непременно стал бы уважаемым человеком.

Нужно сказать, что Сэм-старший очень гордился своими профессиональными способностями. Когда Сэм-младший был на последнем курсе колледжа, Сэм-старший узнал из беседы с сыном, что современные физики широко используют во многих вычислениях методы теории вероятностей. Желая показать сыну, что и по части новой для него теории он многих заткнет за пояс, Сэм-Игрок написал обширный трактат, чтобы продемонстрировать свое искусство в вычислении вероятностей.

Сэм-младший попытался было объяснить отцу, что теория вероятностей далеко не исчерпывается вычислением вероятностей и что в ней разработаны весьма тонкие математические методы.

Сэм-младший усомнился даже в том, понимает ли Сэм-старший по-настоящему глубоко фундаментальные принципы теории вероятностей даже в простейших случаях вычисления благоприятных и неблагоприятных шансов, в чем Сэм-старший мнил себя непревзойденным знатоком.

— Рассмотрим в качестве примера, — предложил Сэм-младший, — хотя бы следующую игру. Я кладу в шляпу три карточки: одну красную с обеих сторон, одну белую с обеих сторон и одну красную с одной стороны и белую с другой.

Предположим, что я извлекаю из шляпы одну карточку. Вынутая мной карточка обращена к нам красной стороной, какого цвета у нее другая сторона, мы не знаем.

— Ты хочешь, чтобы я догадался, какого цвета другая сторона? — спросил Сэм-Игрок.

— Совершенно верно, — согласился Сэм-младший. — Точнее говоря, ты должен сообщить мне, какова вероятность того, что у вынутой мною карточки другая сторона красная. Раз у вынутой мной карточки одна сторона красная, то она может быть только одной из двух карточек: либо красно-красной, либо красно-белой. Ты согласен?

— Согласен.

— Вот я и спрашиваю, какова вероятность того, что извлеченная мной карточка оказалась красно-красной? — заявил Сэм-младший.

— Мог бы придумать задачу и посложнее, — проворчал Сэм-старший. Простота предложенной сыном задачи вызывала у него отвращение. — Ты мог извлечь из шляпы только две карточки, поэтому вероятность того, что у тебя в руке красно-красная карточка, равна одной второй.

— Я знал, что ты так и скажешь, — кивнул Сэм-младший, — но твой ответ неверен!

— Подумать только! И для этого твоя мать хотела, чтобы я послал тебя учиться в колледж! — воскликнул Сэм-старший. — Уж не думаешь ли ты, что разбираешься в вероятностях лучше моего? Чтобы оценивать шансы «за» и «против», никакой математики не требуется. Необходим лишь здравый смысл.

— *Не сердись, — терпеливо увещевал разбушевавшегося родителя Сэм-младший. — Все дело в правильном определении вероятности. Твой ответ подразумевает, что извлечена одна из двух возможных карточек, и что поэтому вероятность равна одной второй, но ты совсем не учитываешь условия задачи. Я сказал, что извлек из шляпы карточку с красной «лицевой» стороной. Чтобы вычислить вероятность того, что извлечена красно-красная карточка, я должен сначала спросить себя, сколькими способами я могу извлечь из шляпы карточку с красной стороной.*

— Все это так, — согласился Сэм-старший, — но почему это меняет ответ?

— А вот почему, — терпеливо продолжал Сэм-младший. — У карточек в шляпе всего три красные стороны, а именно: две красные стороны у красно-красной карты и одна красная сторона у красно-белой карточки.

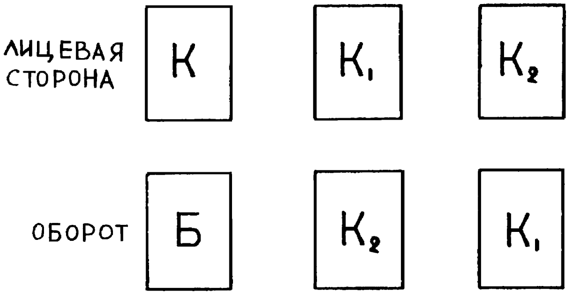
— А кто спорит? — возразил Сэм-старший.

— Но тогда ты должен признать, что существует три способа вытянуть карточку с красной лицевой стороной.

— Согласен.

— Прекрасно! А теперь рассмотрим подробнее те три способа, которыми я могу извлечь карточку с лицевой красной стороной. При одном способе оборотная сторона карточки белая, т. е. я извлек красно-белую карточку, в двух других случаях оборотная сторона карточки красная, т. е. в каждом случае я извлекаю красно-красную карточку. Таким образом, из трех возможных способов извлечь карточку с красной лицевой стороной в двух случаях оборотная сторона карточки оказывается красной и только в одном случае белой. Следовательно, вероятность того, что у извлеченной карточки оборотная сторона красная, равна двум третьим.

— Постой, постой! — усомнился Сэм-старший. — Говоришь ты складно, но слишком быстро, и я не успеваю следить за твоими рассуждениями.



— Попробую доказать свое рассуждение иначе, — невозмутимо продолжал Сэм-младший. — Ты согласился сыграть со мной в эту игру в предположении, что я извлек из шляпы карточку с красной лицевой стороной, но с тем же успехом мы могли бы сыграть в эту игру в предположении, что я извлек карточку с белой лицевой стороной.

— Разумеется, — кивнул Сэм-старший, — разницы никакой.

— Условимся теперь сыграть в новую игру, — продолжал Сэм-младший. — Если я извлеку карточку с красной лицевой стороной, то ты должен будешь определить вероятность того, что извлечена красно-красная карточка, а если я извлеку карточку с белой лицевой стороной, то ты должен будешь определить вероятность того, что извлечена бело-белая карточка. Суть проблемы на этом примере особенно ясна. Игра остается одной и той же, играем ли мы «на красное» или «на белое». Поэтому, играя на красное или на белое, мы получаем ту же самую вероятность, которую получили бы, играя только на красное или только на белое. А вот если бы мы вздумали играть на красное и на белое, то ответ был бы иным. Вопрос, который я задаю в действительности, звучит так: какова вероятность извлечь из трех карточек в шляпе карточку, обе стороны которой одного цвета, по сравнению с вероятностью извлечь карточку, стороны которой различного цвета? Ответ задачи в этом случае гласит, что вероятности относятся как 2 : 1, *поскольку две карточки из трех имеют обе стороны одного цвета.*

Тузы

— Подумаешь! — произнес Сэм-старший, явно желая оправдать свою неудачу. — Ты просто придумал задачу-уродца. Такой место в кунсткамере. Я уверен, что на практике необходимость использовать строгое определение вероятности при решении настоящих задач никогда не возникает. К тому же никто не играет в игры с какими-то дурацкими карточками!

— В этом я как раз не уверен, — возразил Сэм-младший. — Я могу привести аналогичный пример с настоящими игральными картами.

— Великолепно! Действительно, почему бы нам не попробовать сыграть настоящими картами?

— Договорились. Предположим, что у тебя на руках обычная взятка из карт для игры в бридж. Одна карта во взятке — туз пик, остальные двенадцать карт совершенно случайны.

— Ты хочешь сказать, — уточнил Сэм-старший, — что мы рассматриваем взятку только в том случае, если в ней есть туз пик?

— Совершенно верно, — подтвердил Сэм-младший. — Если взятка не содержит туза пик, мы ее просто не рассматриваем, а перетасовываем колоду и сдаем другую взятку. Мы играем в нашу игру только в том случае если во взятке есть туз пик.

— Понял. Продолжай.

— Среди двенадцати остальных карт во взятке могут быть тузы других мастей, присутствие туза пик гарантировано, но существует ненулевая вероятность того, что в колоде в действительности два или больше тузов.

— Пока все понятно, — кивнул Сэм-старший.

— Тогда рассмотрим другую ситуацию, — продолжил Сэм-младший — На этот раз предположим, что у тебя на руках другая взятка карт для игры в бридж. Но теперь мы знаем лишь, что во взятке есть туз — какой-то масти. Если тузов во взятке нет, то такую колоду мы просто не рассматриваем. Вторую взятку мы допускаем к рассмотрению только в том случае, если в ней есть по крайней мере один туз. И в этом случае среди остальных двенадцати карт взятки могут быть и другие тузы, и существует отличная от нуля вероятность того, что во взятке два или более тузов.

Я хочу, чтобы ты сравнил вероятности обнаружить два или более тузов в этих двух случаях. Напомню, что в первом случае во взятке непременно есть туз пик, а во втором случае — туз какой-то масти. Как отличаются друг от друга вероятности обнаружить в колодах два или более тузов в этих случаях?

— Послушай-ка, сынок, — произнес Сэм-старший, терпеливо выслушав условия задачи. — Я играл в карты, когда тебя еще и на свете не было. Поверь мне, никакой разницы между тузом пик и тузом любой другой масти нет. Гарантировать, что во взятке есть туз пик, то же самое, что гарантировать, что во взятке есть туз какой-то масти, как ты изволил выразиться. И в обоих случаях вероятность того, что среда остальных двенадцати карт есть еще один или несколько тузов, в точности одна и та же.

— Ты хочешь сказать, что по-твоему вероятность иметь во взятке два или более тузов в первом и во втором случаях одинакова?

— Именно это я и сказал.

— Тогда ты опять заблуждаешься, — улыбнулся Сэм-младший, — причем по той же причине, что и прежде.

— Тебе придется очень постараться, чтобы убедить меня в этом.

— *Позволь, я попытаюсь сформулировать из сказанного более простую задачу, — предложил Сэм-младший. — Чтобы основные идеи те-*

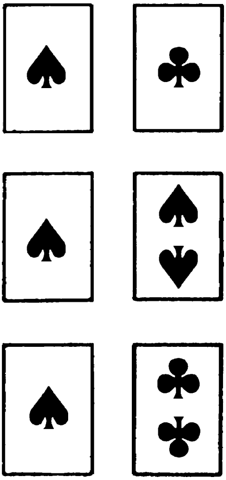
ории вероятностей стали видны более отчетливо, возьмем взятку, состоящую только из четырех карт: туза пик, туза треф и двойки пик, двойки треф. Из такой уменьшенной взятки ты получаешь взятки только из двух карт. Все остальные условия остаются прежними, т. е. в первом случае гарантируется, что из двух карт у тебя на руках одна — туз пик, а другая — какая-то. Во втором случае из двух карт одна заведомо туз какой-то масти, а другая — любая.

Полагаю, ты согласишься, что сравнение вероятностей в уменьшенных взятках более наглядно и поучительно, чем сравнение вероятностей в полных взятках для игры в бридж?

— Не спорю, — согласился Сэм-старший. — Числа получатся другими, но отношение вероятностей для упрощенной игры покажет, каким должен быть ответ в случае полных взяток для игры в бридж.

— Прекрасно! В таком случае ответь, пожалуйста, какие возможные взятки могут оказаться у тебя в упрощенной задаче с непременным тузом пик?

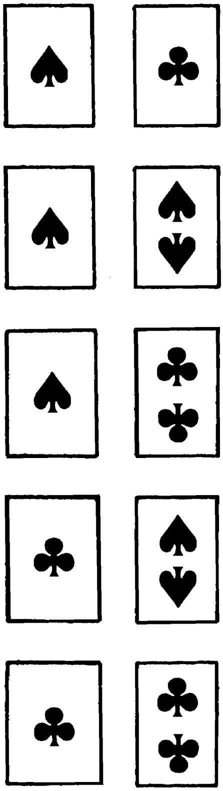
— Проще простого! Вот они:



И разумеется, вероятность получить взятку с двумя тузами из трех взяток с непременным тузом пик равна $2/3$.

— Правильно, — подтвердил Сэм-младший. — А каковы возможные взятки во втором случае, когда требуется, чтобы в колоде непременно был какой-нибудь козырь?

— И в этом случае ответ очень прост:



На этот раз мы получаем пять возможных взяток, а из этих пяти только в одной взятке два туза, что дает вероятность, равную только 1/5*. Но почему так?*

Сэм-младший рассмеялся и объяснил:

— Вероятность благоприятного исхода по определению равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу испытаний. И в первой, и во второй рассмотренной нами задаче в заблуждение вводит общее число возможных испытаний.

В упрощенной задаче ограничение на масть туза (то обстоятельство, что в колоде непременно должен быть туз пик) приводило только к уменьшению общего числа возможных раскладов колоды. Но это условие ничуть не изменило число благоприятных исходов, т. е. благоприят-

ных раскладов взятки, удовлетворяющих условиям задачи. Разумеется, в задаче о «полновесной» взятке, в настоящей, а не упрощенной игре в бридж, числитель дроби, выражающей требуемую вероятность, т. е. число благоприятных исходов, будет ограничен условием непременного присутствия туза определенной масти, но общее число возможных взяток с тузом пик будет ограничено гораздо сильнее. Вероятность в этом случае оказывается больше, чем в случае, когда во взятке непременно должен быть туз какой-то масти.

Вероятность случайного события

— Ты начинаешь убеждать меня, — вздохнул Сэм. — Может быть, нам лучше перейти к бросанию монеты или чему-нибудь в том же духе?

— По правде говоря, я не собирался заходить так далеко, но ты напомнил мне одну интересную историю. Когда я учился на последнем курсе в колледже, нам пришлось прослушать один дурацкий курс, который не дал ровно ничего нашему образованию. Должно быть, этот курс был включен в программу в незапамятные времена, и о нем просто-напросто забыли. Лектор чувствовал себя очень неловко и всячески давал нам понять, что ему очень неловко попусту тратить наше время. В утешение в начале семестра он сообщил нам, что поставит всем только отличные и хорошие оценки, поэтому нам следует беспокоиться не об успеваемости, а только о напрасно потраченном времени.

Лектор был человеком, помешанным на честности, и когда ему в конце семестра пришлось выставлять оценки, не обошлось без небольшой проблемы. Дело в том, что он всем собирался поставить только хорошие и отличные оценки, распределив их среди студентов случайным образом: каждый, прослушавший курс, мог с вероятностью $1/2$ получить оценку «отлично» и с такой же вероятностью — оценку «хорошо».

Наш лектор намеревался пройтись по списку студентов и, останавливаясь на каждой фамилии, бросать монетку: орел означал бы «отлично», а решка — оценку «хорошо». Но прежде чем он приступил к бросанию монеты, его пронзила ужасная мысль: что если монета слегка несимметрична? Ведь тогда вероятности выпадения орла и решки окажутся смещенными, и оценки будут распределяться нечестно!

Проблема, с которой столкнулся наш лектор, состояла в следующем: если монета несимметрична, то можно ли случайным образом распределить оценки среди студентов, прослушавших курс, так, чтобы каждый из них с одинаковой вероятностью мог получить и отличную, и хорошую оценку?

Сэм-старший издал короткий смешок и заметил:

— Я всегда знал, что оценки ставятся наобум, но не думал, что кому-нибудь понадобится исключать эффект возможной асимметрии монеты. Все же, как мне кажется, я знаю, что нужно сделать. Что если лектор станет бросать монету дважды? Разве не верно, что независимо от смещения вероятность выпадения сначала орла, а потом решки в точности равна вероятности выпадения сначала решки, а потом орла?

Сэм-младший тоже рассмеялся:

— Что верно, то верно! А если оба бросания завершатся одинаковыми исходами, то их нужно просто исключить и бросать монетку снова два раза подряд. В зачет идут только те бросания, при которых сначала выпадает орел, а потом решка, или сначала решка, а потом орел. Тогда лектор выставляет оценку «отлично», если первым выпадает орел, и «хорошо», если первой выпадает решка.

— Причина, по которой такая тактика дает правильный результат, очень любопытна, — продолжал Сэм-младший, — и я хотел бы пояснить, в чем тут дело.

Путь p — вероятность выпадения орла при первом или втором бросании. Тогда вероятность выпадения решки равна $1 - p$. Следовательно, вероятность выпадения в первом бросании орла, а во втором решки равна произведению p и $1 - p$, т. е. $p(1 - p)$.

Точно так же вероятность выпадения при первом бросании решки, а при втором орла равна $(p - 1)p$.

Но так как умножение обыкновенных чисел коммутативно, т. е. произведение не зависит от порядка сомножителей, оба произведения равны:

$$p(1 - p) = (1 - p)p.$$

Поэтому твой ответ правилен.

Бросание монет

Сэм-старший улыбнулся и сказал:

— Я знал, что когда дело дойдет до денег, я смогу показать тебе, что разбираюсь в своем деле.

— Никогда в этом не сомневался, — заверил отца Сэм-младший. — Я только хотел обратить твое внимание на некоторые тонкости в простейших понятиях теории вероятностей. В том деле, которым ты занимаешься, приходится думать не только о вероятностях, но и о многом другом, например основательно разбираться в теории игр: ведь то, что ты делаешь, по существу сводится к разработке стратегий.

— Ничего подобного! — запротестовал Сэм-старший. — Просто у меня большой опыт в тех делах, которыми я занимаюсь, только и всего.

— Никто не спорит и не ставит под сомнение, что ты можешь действовать интуитивно. Но твои приемы есть не что иное как методы теории игр. Если не возражаешь, я попытаюсь продемонстрировать это на очень простом примере.

Предположим, что мы играем с тобой в нехитрую игру. Каждый из нас бросает свою монету. Если обе монеты выпадают вверх орлами или вверх решками, то выигрываешь ты. Если монеты выпадают по-разному, одна вверх орлом, другая вверх решкой, то выигрываю я, причем безразлично, чья именно монета выпадает вверх орлом, а чья — вверх решкой. А теперь сделаем игру более интересной.

Если выигрываешь ты, то я плачу́ тебе 9 пенсов за два орла и 1 пенс за две решки. Если же выигрываю я, то при любом раскладе, т. е. независимо от того, выпадает ли комбинация «орел-решка» или «решка-орел», ты платишь мне 5 центов.

Перед игрой и даже во время игры ты можешь как угодно менять свои монеты на фальшивые.

Как видишь, все сказанное делает игру с бросанием монет гораздо интереснее. Она позволяет выработать удобную стратегию. Поскольку наибольший выигрыш тебе сулит выпадение комбинации «орел-орел», ты можешь предпочесть заменить свои монеты такими, которые чаще выпадают вверх орлом. Но поскольку мне об этом известно, я могу пойти на замену своих монет такими, которые чаще выпадают вверх решкой, так как я выигрываю при выпадении комбинаций «орел-решка» и «решка-орел».

Таким образом, перед каждым из нас возникает проблема: как лучше всего построить схему замены своих монет фальшивыми, если известно, что партнер вырабатывает для себя аналогичную схему.

— Что и говорить, звучит заманчиво, — вынужден был признать Сэм. — Так как в среднем я мог бы каждый раз выиграть среднее между девятью центами и одним центом, а ты — среднее между пятью и пятью центами, т. е. столько же, сколько и я, мы имеем равные шансы на выигрыш, и я считаю игру честной. Я готов сыграть с тобой и уверен, что сумею заменить свои монеты фальшивыми так, чтобы перехитрить тебя и научить хотя бы немного уважать старших.

Сэм-младший покачал головой.

— Не сердись, но я не возьму твоих денег. Дело в том, что игра, которую я тебе предлагаю, мошенническая: я могу выбрать такую стратегию замены монет фальшивыми, что при достаточно длинной серии бросаний ты можешь лишь надеяться свести проигрыш до минимума. Но ты непременно проиграешь, а я выиграю. Более того, я могу математически вычислить, какую долю бросаний у меня составит выпадение орла независимо от того, выпадает у тебя орел или решка. И из вычислений я могу узнать, сколько смогу выиграть при достаточно длинной серии бросаний.

Я покажу тебе, как производятся такие вычисления, хотя ты можешь поверить мне на слово. Просто мне кажется, что тебе будет интересно. Вот как это делается.

Напомню, что я хочу вычислить долю бросаний, в которых у меня должен был бы выпасть орел. Обозначим ее через x*, а размеры моего платежа через* P*.*

Рассмотрим сначала, что происходит, когда у тебя выпадают орлы. Всякий раз, когда моя монета падает вверх орлом и у тебя выпал орел, я теряю 9 центов. Так как доля орлов составляет x *от общего числа бросаний, это означает, что в моей платежной функции есть член —* $9x$*. Аналогичным образом, всякий раз, когда у меня выпадают решки, а у тебя орлы, я выигрываю 5 центов. Так как решки составляют* $(1-x)$ *часть от всех бросаний, в моей платежной функции должен быть член* $5(1-x)$*.*

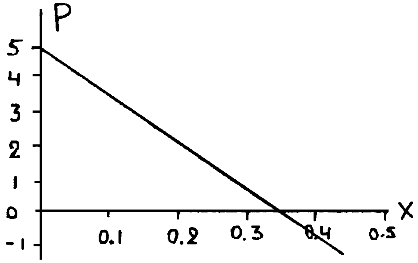
Таким образом, если я запишу мою полную платежную функцию для тех случаев, когда у тебя выпадают орлы, то она окажется

$$P_{\text{орлы}} = -9x + 5(1-x),$$

или просто

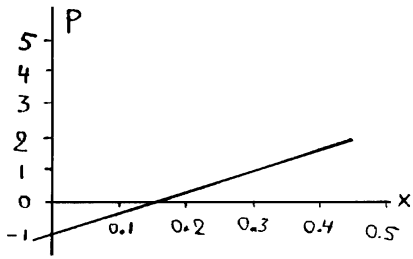
$$P_{\text{орлы}} = -14x + 5.$$

Вот ее график:

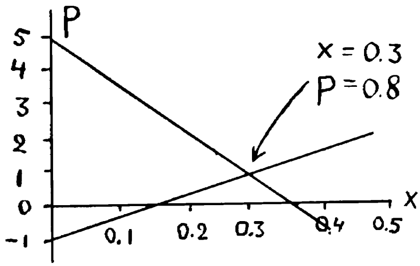


Рассмотрим теперь, что происходит, когда у тебя выпадают решки. Действуя так же, как прежде, я получаю платежную функцию

$$P_{решки} = +5x - 1(1 - x),$$
$$P_{решки} = 6x - 1.$$



Накладывая оба графика один на другой, мы находим, что они пересекаются при $x = 0{,}3$ и $P = 0{,}8$.



Это означает, что если я заменю $3/10$ моих монет на фальшивые и случайным образом распределю фальшивые монеты среди моих монет, то в достаточно длинной серии бросаний я буду в среднем вы-

игрывать 0,6 *цента всякий раз, когда твоя и моя монеты выпадут обе либо вверх орлами, либо вверх решками.*

Дни рождения

— Придумано хитро, хотя, должен признаться, я никак не возьму в толк, как же все получается, — признался Сэм-старший. — Сегодня вечером я собираюсь заглянуть в клуб. Кстати, нет ли у тебя подходящей математической задачки с неожиданным решением? Мне бы хотелось немного позабавиться и позабавить членов клуба.

— Как не быть! — улыбнулся Сэм-младший. — Но сначала скажи мне, пожалуйста, сколько членов клуба соберется сегодня вечером.

— Человек эдак тридцать, — прикинул Сэм-старший.

— Великолепно! Дело в том, что я хочу рассказать тебе об одной задаче о днях рождения, а для нее людей должно быть достаточно много. Представь себе, что тебе известны дни рождения всех членов клуба, которые соберутся сегодня, какова по-твоему вероятность совпадения дней рождения двух членов клуба? Под днем рождения я имею в виду не год, а только месяц и день.

— Мне кажется, что вероятность совпадения дней рождения у двух из тридцати случайным образом собравшихся людей должна быть что-нибудь около 0,05, но я готов держать пари из расчета 5 к 1.

— Охотно принимаю пари, — согласился Сэм-младший, — а заодно предлагаю тебе заключить пари с кем-нибудь из членов клуба. Даже если кто-нибудь из них предложит тебе пари из расчета 1 к 1, то рекомендую тебе принять такое пари.

— А вот этого я решительно не понимаю! — воскликнул Сэм-старший.

— *Между тем перед тобой один из примеров того, что мы называем «мультипликативной природой независимых вероятностей». Ты опрашиваешь членов клуба об их днях рождения до тех пор, пока чей-нибудь день рождения не повторится, и в худшем случае тебе придется опросить всех тридцать членов клуба. Так как опрос продолжается только в том случае, если день рождения очередного члена клуба не совпадает с днем рождения ни одного из ранее опрошенных членов клуба, вероятности, которые требуется перемножить, — это вероятности несовпадения дня рождения каждого из вновь опрошенных. А вероятность совпадения дней рождения, разумеется, равна единице минус полученная вероятность несовпадения дней рождения.*

Иначе говоря, день рождения второго из опрошенных тобой членов клуба с вероятностью $364/365$ *не совпадает с днем рождения первого из опрошенных. Что же касается третьего из опрошенных, то его день рождения может совпадать с днями рождения любого из первых двух опрошенных, поэтому вероятность того, что его день рождения не совпадает с их днями рождения, составляет* $363/365$.

Это означает, что после того, как ты опросил трех членов круга об их днях рождения, вероятность совпадения дней рождения у двух из трех опрошенных стала равна $1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$.

А когда ты опросишь всех 30 *членов клуба, вероятность совпадения дней рождения у двух из них окажется равной*

$$1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{336}{365}.$$

Оценить это число можно различными способами, но ответ, разумеется, будет одинаков. Он означает, что вероятность совпадения двух дней рождения составляет примерно $0{,}7$, *т. е. ты можешь заключить пари на то, что у кого-то из* 30 *членов клуба дни рождения совпадают с шансами на выигрыш, более высокими, чем* 2 *к* 1.

— Поразительно! — не мог не признать Сэм-старший. — А сколько людей следовало бы опросить, чтобы я мог, заключить пари 1 *к* 1 *на то, что у двух из них дни рождения совпадают?*

— Примерно 24 *человека. Интересно, что после* 24 *шансы на выигрыш такого пари быстро возрастают.*

Теннисный турнир

— Думаю, что пока задач на вероятности хватит, — сказал Сэм-старший. — Мне и с тем, что ты мне сообщил, придется разбираться несколько недель. Насколько я знаю, ты собираешься этим летом хорошенько подзаняться теннисом и забудешь про всякую математику.

— Я действительно хочу поиграть в теннис, — подтвердил Сэм-младший, — но, как ни странно, именно в связи с теннисом я столкнулся с одной задачей, которую никак не могу решить, несмотря на всю мою математическую подготовку.

— А какое отношение имеет математика к теннису? — удивился Сэм-старший. — Поясни!

— Речь идет не о применении математики в теннисе, хотя и такое в принципе возможно, — ответил Сэм-младший. — Но в данном случае речь идет о другом. Я провожу турнир юных теннисистов и никак не могу сосчитать, сколько упаковок теннисных мячей мне понадобится для того, чтобы полностью обеспечить участников. При проведении турнира мы берем всех участников и разбиваем их на пары в играх первого тура. Затем мы берем победителей, разбиваем их на пары для второго тура и продолжаем в том же духе до тех пор, пока не останется один-единственный победитель.

Проблема состоит в том, что для каждой встречи между двумя игроками я должен приготовить упаковку новеньких теннисных мячей. Если в каком-нибудь туре соревнования выходит нечетное число игроков, то один из них при жеребьевке вытягивает билетик с надписью «Всего хорошего!» и не участвует в очередном туре, но если возможно, его допускают к участию в следующем туре.

Мои расчеты затрудняет возможность появления «нечетных» игроков в конце то одного, то другого тура — тех, кто вытягивает билетик с надписью «Всего хорошего!» Я никак не могу сосчитать полное количество встреч, которые будут сыграны, если число участников турнира считать известным и принять во внимание тех, кто, вытащив билетик с надписью «Всего хорошего!», может пропустить один тур и оказаться в следующем.

Сэм-старший рассмеялся;

— На этот раз я могу помочь твоей беде. Позабудь о том, что в конце любого тура число победителей может оказаться нечетным. Вместо того чтобы подсчитывать число встреч, которые могут состояться тур за туром с учетом того, что отдельные игроки могут, минуя очередной тур, переходить в следующий, гораздо проще посмотреть на весь турнир в целом. Если отвлечься от деталей, то можно с уверенностью сказать, что при каждой встрече один участник вылетает. Следовательно, если исходное число участников турнира равно n, а после финальной встречи должен остаться один-единственный победитель турнира, то $n-1$ участников должны выбыть. Для этого необходимо провести $n-1$ встреч. Следовательно, тебе необходимо позаботиться о $n-1$ упаковках теннисных мячей.

Односторонняя игра

Как-то раз Сэм-старший и его сын, начинающий вкушать плоды математического просвещения, поспорив по какому-то малозначительному поводу, заключили пари, и Сэм-младший предложил отцу, чтобы проигравший не платил выигравшему обычную ставку в несколько долларов, а сыграл с ним в игру, которая бы и определила, сколько нужно уплатить.

— Игра очень простая, — убеждал отца Сэм-младший, — мы просто бросим монету. Предположим, что ты проиграл пари. Мы бросаем монету, и если ты угадываешь исход бросания, то на этом все и кончается, и ты мне ничего не должен. С другой стороны, если исход бросания предсказан тобой неверно, то ты платишь мне 2 доллара, и мы бросаем монету второй раз. Если ты правильно угадываешь исход второго бросания, то игра на этом заканчивается и ты мне ничего больше не платишь. Таким образом, в этом случае я получаю от тебя всего 2 доллара. Если же исход второго бросания угадан тобой неверно, то ты платишь мне еще 4 доллара и т. д. Каждый раз, когда ты не угадываешь исход бросания, тебе придется уплатить мне вдвое больше, чем в предыдущий раз.

Игра продолжается лишь до тех пор, пока ты неверно предсказываешь исход бросания монеты. Как только ты угадываешь исход бросания, игра прекращается, и ты больше мне ничего не платишь. Идет?

— Идет! — согласился Сэм-старший, в котором проснулся азарт игрока. — Даже если я проиграю пари, то у меня останется шанс пятьдесят на пятьдесят остаться при своих, а если я не угадаю исход первого бросания, то затем мне вскоре все равно удастся правильно предсказать исход другого бросания, и я все же выиграю.

На следующий день выяснилось, что Сэм-старший проиграл пари. Пришлось бросать монету, чтобы выяснить, сколько он должен уплатить Сэму-младшему.

— А почему бы нам не оценить математически, сколько ты мне должен, вместо того чтобы по-настоящему бросать монету? Если ты против, я охотно все подсчитаю. Ведь ты же сам хотел, чтобы я изучал математику, так почему бы мне не воспользоваться тем, чему меня научили?

— Валяй, — неохотно согласился Сэм-старший. Разумеется, он предпочел бы попросту, без затей, бросать монету. — Только объясни мне понятно, как ты делаешь все эти математические вычисления, чтобы определить, сколько я тебе должен. Если все будет правильно, то я, конечно, уплачу сколько надо.

— Не бойся, все очень просто, и ты легко поймешь суть дела без всякой математики. При первом бросании я могу с одинаковыми шансами не получить ничего или выиграть 2 доллара. Поэтому я поступлю честно, если попрошу тебя уплатить мне 1 доллар вместо того, чтобы бросать монету.

— Достаточно честно, — подтвердил Сэм-старший.

— Хорошо! А что ты скажешь по поводу второго бросания? Ведь если я выиграю, то получу 4 доллара. Существует 1 шанс против 2, что монету вообще придется бросать второй раз, поскольку это произойдет только в том случае, если ты не угадаешь исход первого бросания. Но если нам все же придется бросать монету во второй раз, то существует 1 шанс против 2, что я выиграю и получу от тебя 4 доллара. Следовательно, только в 1 случае из 4 я получу эти 4 доллара, если мы «по-настоящему» станем бросать монету. Поэтому предлагаю тебе уплатить мне четвертую часть от 4 долларов, т. е. 1 доллар, чтобы мы обошлись без бросания монеты.

— Гм, — забеспокоился Сэм-старший, — за то, что мы не будем бросать монету по-настоящему во второй раз, я должен уплатить тебе 1 доллар. А что ты скажешь о третьем бросании? Оно тоже обойдется мне в 1 доллар?

— Конечно, — подтвердил Сэм-младший. — За третье бросание я мог бы выиграть и 8 долларов, разумеется, если бы до него дошло дело, а это может случиться только в том случае, если я выиграю первые два бросания. Вероятность такого события (двух моих выигрышей) равна 1/4. Кроме того, если мы бросим монету в третий раз, то я могу выиграть только с вероятностью 1/2, поэтому вероятность выиграть 8 долларов равна 1/8. Те же соображения остаются в силе и относительно любого последующего бросания, поэтому я могу попросить у тебя по 1 доллару за каждое из бесконечной серии бросаний. Разумеется, на твоем счете в банке нет такого количества долларов, но я человек не злой и обойдусь с тобой по-хорошему: ты дашь мне всего лишь 10 тысяч долларов, которые я хочу израсходовать на покупку нового спортивного автомобиля.

— Ничего себе «по-хорошему!» — взорвался от негодования Сэм-старший. — Да ты просто юный мошенник! Вот как ты используешь свое математическое образование! Впрочем, придется тебе подождать до завтра — возможно, мне удастся найти слабое место в твоих рассуждениях.

Весь день до самого вечера Сэм снова и снова перебирал в уме рассуждения сына, но никак не мог обнаружить в них ошибки. Все выглядело так, словно он, Сэм-старший, действительно должен был платить сыну по 1 доллару за каждое последующее бросание монеты и таким образом отдать Сэму-младшему все свои деньги. Доведенный почти до отчаяния, Сэм-старший вдруг вспомнил, что частенько встречал в клубе невысокого седоголового человека, о котором говорили, что он отставной профессор математики.

— Ну разве мой сын не умница? — со смешанными чувствами подумал Сэм-старший. — Насколько мне помнится, тот пожилой джентльмен всегда проигрывал, несмотря на все свои познания в математике.

Отыскав имя и адрес профессора в книге регистрации членов клуба, Сэм-старший в тот же вечер постучал в дверь дома, где жил профессор.

— Хочу сделать вам предложение, — заявил Сэм профессору. — Я берусь оплатить все ваши долги в клубе, если вы поможете мне решить одну математическую задачу.

И Сэм-старший поведал профессору свои затруднения.

— Очень любезно с вашей стороны, — ответил профессор, потирая руки. — Трюк, к которому прибег ваш сын, известен в теории вероятностей под названием Петербургского парадокса и был придумал швейцарским математиком Леонардом Эйлером, состоявшим в ту пору на службе при российском императорском дворе. Не сочтите за нескромность, но могу ли я спросить, сколько денег на вашем банковском счете?

— Но я вовсе не желаю выплачивать все свои деньги этому мальчишке!

— *А вам и не придется этого делать! Размеры вашего банковского счета необходимы мне для того, чтобы оценить, сколько раз вам придется сыграть в вашу игру.*

Суть дела заключается в следующем: хотя абсолютно верно, что за каждое последующее бросание монеты вы должны платить сыну по 1 *доллару, учитывать вы должны только то количество бросаний, которое вам по силам оплатить до того, как вы полностью разоритесь и станете банкротом.*

Если вы сыграете с сыном n игр, все время проигрывая, то вам *придется уплатить сыну* $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^n$ *долларов. Это не что иное, как геометрическая прогрессия и ее сумма равна числу* 2, *умноженному на самого себя столько раз, сколько игр вы сыграете, плюс еще* 1 *раз, минус* 2. *Математически это можно записать как*

$$2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2.$$

Это число очень быстро возрастает с числом бросаний монеты. Пример: если вы неправильно угадаете исходы 10 *первых бросаний, то вам придется уплатить сыну* $2^{n+1} - 2$ *при* $n = 10$, *т. е.* $2^{11} - 2 = 2046$ *долларов. Думаю, что на вашем счете в банке денег больше?*

— *Да, у меня около полумиллиона долларов, — откровенно признался Сэм.*

— *Чтобы проиграть полмиллиона долларов, вам потребуется подряд не угадать исходы* 18 *бросаний монеты. Если вы не угадаете исход* 19*-го бросания, то у вас не хватит денег, чтобы расплатиться. Поэтому ваш сын может рассчитывать не более чем на* 18 *бросаний, а вы должны уплатить ему* 18 *долларов. Можете сделать это завтра утром.*

— Миллион благодарностей, профессор! — воскликнул Сэм-Игрок. — Жаль, что сын уже почти взрослый, и я не могу выпороть его ремнем! Восемнадцать долларов были бы очень кстати! Всего доброго, сэр! Буду счастлив оплатить все ваши долги в клубе!